Misura elementare iperboli

Typeset in $\TeX$
in date 14 6 2006

Calcoli

Partiamo dalla famiglia di iperboli definita dall'equazione

$$x^2 + 2Axy + (A^2 - B^2)y^2 + 2Cx + 2Dy + E = 0$$

con le condizioni supplementari

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & A & C \\ A & A^2 - B^2 & D \\ C & D & E \end{vmatrix} = -(AC - D)^2 + B^2(C^2 - E) \neq 0 \quad B \neq 0$$

che identifica una famiglia a 5 parametri; il suo gruppo massimo di invarianza sarebbe il gruppo affine identificato dalle trasformazioni

$$\begin{cases} x' = a_1x + b_1y + c_1 \\ y' = a_2x + b_2y + c_2 \end{cases} \quad (a_1b_2 - a_2b_2 \neq 0)$$

dove l'identità è identificata dai valori per i parametri $a_1 = b_2 = 1$ e $a_2 = b_1 = c_1 = c_2 = 0$.

Applicando questo gruppo alla famiglia in esame si ottiene la equazione trasformata

$$\begin{aligned}(a_1x + b_1y + c_1)^2 + 2A(a_1x + b_1y + c_1)(a_2x + b_2y + c_2) + (A^2 - B^2)(a_2x + b_2y + c_2)^2 \\ + 2C(a_1x + b_1y + c_1) + 2D(a_2x + b_2y + c_2) + E = 0\end{aligned}$$

quindi in generale non si ottiene piú l'unità davanti a x^2 che invece diventa $(a_1 + Aa_2)^2 - B^2a_2^2$, quindi dividiamo per esso ed otteniamo i seguenti

$$\begin{cases} A' = \frac{a_1b_1 + A(a_1b_2 + b_1a_2) + (A^2 - B^2)a_2b_2}{(a_1 + Aa_2)^2 - B^2a_2^2} \\ (A^2 - B^2)' = \frac{(b_1 + Ab_2)^2 - B^2b_2^2}{(a_1 + Aa_2)^2 - B^2a_2^2} \\ C' = \frac{a_1c_1 + A(a_1c_2 + c_1a_2) + (A^2 - B^2)a_2c_2 + Ca_1 + Da_2}{(a_1 + Aa_2)^2 - B^2a_2^2} \\ D' = \frac{b_1c_1 + A(b_1c_2 + b_2c_1) + (A^2 - B^2)b_2c_2 + Cb_1 + Db_2}{(a_1 + Aa_2)^2 - B^2a_2^2} \\ E' = \frac{c_1^2 + 2Ac_1c_2 + (A^2 - B^2)c_2^2 + 2Cc_1 + 2Dc_2 + E}{(a_1 + Aa_2)^2 - B^2a_2^2} \end{cases}$$

Calcolando i generatori infinitesimi si ottiene[1]

$$\begin{array}{lllll}
\eta^A_{a_1} = -A & \eta^B_{a_1} = -B & \eta^C_{a_1} = -C & \eta^D_{a_1} = -2D & \eta^E_{a_1} = -2E \\
\eta^A_{a_2} = -A^2 - B^2 & \eta^B_{a_2} = -2AB & \eta^C_{a_2} = D - 2AC & \eta^D_{a_2} = -2AD & \eta^E_{a_2} = -2AE \\
\eta^A_{b_1} = 1 & \eta^B_{b_1} = 0 & \eta^C_{b_1} = 0 & \eta^D_{b_1} = C & \eta^E_{b_1} = 0 \\
\eta^A_{b_2} = A & \eta^B_{b_2} = B & \eta^C_{b_2} = 0 & \eta^D_{b_2} = D & \eta^E_{b_2} = 0 \\
\eta^A_{c_1} = 0 & \eta^B_{c_1} = 0 & \eta^C_{c_1} = 1 & \eta^D_{c_1} = A & \eta^E_{c_1} = 2C \\
\eta^A_{c_2} = 0 & \eta^B_{c_2} = 0 & \eta^C_{c_2} = A & \eta^D_{c_2} = A^2 - B^2 & \eta^E_{c_2} = 2D
\end{array}$$

[1] In generale per calcolare η^B_i uso la formula $2B\eta^B_i = 2A\eta^A_i - \partial_i(A^2 - B^2)$.

Da questi si ottiene facilmente la equazione di Deltheil

$$
\begin{aligned}
&7\phi + A\partial_A\phi + B\partial_B\phi + C\partial_C\phi + 2D\partial_D\phi + 2E\partial_E\phi = 0\\
&10A\phi + (A^2+B^2)\partial_A\phi + 2AB\partial_B\phi + (2AC-D)\partial_C\phi + 2AD\partial_D\phi + 2AE\partial_E\phi = 0\\
&\partial_A\phi + C\partial_D\phi = 0\\
&3\phi + A\partial_A\phi + B\partial_B\phi + D\partial_D\phi = 0\\
&\partial_C + A\partial_D\phi + 2C\partial_E\phi = 0\\
&A\partial_C\phi + (A^2-B^2)\partial_D\phi + 2D\partial_E\phi = 0
\end{aligned}
$$

Subito dalla terza si ottiene che

$$\frac{dA}{1} = \frac{dD}{C} \to (AC-D) = \text{costante} = u$$

quindi $\phi = \phi(u, B, C, E)$ questa la utilizzo con la quinta per ottenere

$$\partial_C\phi + \partial_u\phi\left(A\frac{du}{dD} + \frac{du}{dC}\right) + 2C\partial_E\phi = 0 \to \frac{dC}{1} = \frac{dE}{2C} \to C^2 - E = \text{costante} = v$$

e riconsiderando adesso $\phi = \phi(u, v, B)$ utilizziamo l'ultima equazione per scrivere

$$A\partial_u\phi\left(A\frac{du}{dC} + (A^2-B^2)\frac{du}{dD}\right) + \partial_v\phi\left(A\frac{dv}{dC} + 2D\frac{dv}{dE}\right) = 0 \to \frac{du}{B^2} = \frac{dv}{2u} \to -u^2 + B^2v = \text{costante} = w$$

A questo punto abbiamo una funzione del tipo $\phi = \phi(w(u, v, B), B)$ che ci permette di trovare le seguenti relazioni fra le sommatorie di derivate

$$
\begin{aligned}
A\partial_A + B\partial_B + D\partial_D = 2w\partial_w\\
C\partial_C + D\partial_D + 2E\partial_E = 2w\partial_w
\end{aligned}
$$

quindi la prima equazione diventa

$$7\phi + 4w\partial_w\phi + B\partial_B\phi = 0$$

e la quarta invece

$$3\phi + 2w\partial_w\phi + B\partial_B\phi = 0 \tag{$*$}$$

moltiplicando la prima per 3 e la seconda per 7 si ottiene l'equazione

$$w\partial_w\phi + 2B\partial_B\phi = 0$$

che ha come soluzione

$$z = \frac{B}{w^2}$$

Un discorso analogo sulle derivate di z ci permette di scrivere

$$B\partial_B + 2w\partial_w = -3z\partial_z$$

quindi da $(*)$ si ha

$$\phi - z\partial_z\phi = 0$$

che ha come soluzione

$$\phi(z) = z$$

cioè ricapitolando

$$\phi(A, B, C, D, E) = \frac{B}{-(AC-D)^2 + B^2(C^2-E)}$$

è la funzione invariante integrale per la famiglia delle iperboli.